Компьютерные инструменты в образовании, 2020
№ 1: 38–48
УДК: 519.7
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-1-38-48

МИНИМАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ БИНАРНЫХ ОПЕРАЦИЙ РАНГА 3

Еременко Д. А.[1], аспирант, ✉ er_92@list.ru

[1]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), 5, корп. 3, ул. Профессора Попова, 197376, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В работе рассматривается задача нахождения минимальных алгебр бинарных операций ранга 3. Решение данной задачи является первым шагом для построения решетки алгебр бинарных операций ранга 3. Построение такой решетки — один из вопросов универсальной алгебры, в частности теории решеток.

В статье описывается алгоритм нахождения минимальных алгебр, который основан на свойстве идемпотентности операций, порождающих минимальные алгебры. Данный алгоритм был реализован на языке Python. Результаты работы алгоритма представлены в табличном виде.

Ключевые слова: *операции, мультиоперации, решетка алгебр операций, минимальные алгебры операций.*

Цитирование: Еременко Д. А. Минимальные алгебры бинарных операций ранга 3 // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 1. С. 38–48. doi:10.32603/2071-2340-2020-1-38-48

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебры операций и мультиопераций являются традиционными объектами исследования теории представлений классических абстрактных алгебр (например моноидов, групп, колец). В то же время операции и мультиоперации конечной размерности на конечных множествах могут моделировать любой реальный дискретный преобразователь информации.

Одной из основных задач в теории мультиопераций является построение решеток алгебр. Первый этап построения решеток состоит в нахождении минимальных алгебр, лежащих в основании решетки. Вопрос нахождения минимальных алгебр бинарных операций ранга 3 был поставлен на конференции «Пограничные вопросы универсальной алгебры и теории моделей» и отражен в Эрлагольской тетради в разделе «Вопросы по универсальной алгебре» (включая теории решеток и клонов) под номером 2.15 [1]. В данной работе получено решение этой задачи: описывается алгоритм нахождения минимальных алгебр бинарных операций ранга 3, а также приводится описание всех минимальных алгебр.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Введем следующие понятия и определения.

Под n-местной операцией на множестве A понимают отображение из A^n в A.

Под *рангом* операции понимается мощность множества A. $k = |A|$.

Множество всех n-местных операций на A обозначим через P_A^n.

Операции $f \in P_A^n$ на конечном множестве $A = \{a_0, ..., a_{k-1}\}$ можно представить как отображения $f : \{2^0, ..., 2^{k-1}\}^n \to \{0, 1, ..., 2^{k-1}\}$, получаемые из f при кодировке $a_i \to 2^i$.

При этом операцию f зададим векторной формой: $\{a_0, ..., a_{k^n-1}\}$, где $a_i \in \{2^0, ..., 2^{k-1}\}$, $a_i = f(2^{j_1}, ..., 2^{j_n})$, $(j_1, ..., j_n)$ есть представление i в системе исчисления по основанию k n–разрядным числом.

В качестве примера рассмотрим построение векторной формы для двухместной операции ранга 3 ($n = 2, k = 3$).

Зададим произвольное множество из трех элементов $A = \{a_0, a_1, a_2\}$.

Зададим операцию f таблицей Кэли (таблица 1).

Таблица 1. Таблица Кэли для f

f	a_0	a_1	a_2
a_0	a_1	a_1	a_2
a_1	a_0	a_1	a_1
a_2	a_2	a_0	a_0

В соответствии с кодировкой $a_i \to 2^i$ пронумеруем исходные элементы множества A и составим таблицу 2.

Таблица 2. Таблица Кэли для f с кодировкой

f	1	2	4
1	2	2	4
2	1	1	2
4	4	1	1

Составим векторную форму $(a_0, ..., a_{k^n-1})$:

$a_0 = f(2^{j_1}, 2^{j_2})$, $0 = 00_3$, таким образом, $j_1 = 0, j_2 = 0$.

$a_0 = f(2^0, 2^0)$, так как $0 = 00_3$, $f(1, 1) = 2$ или исходный элемент a_1,
$a_1 = f(2^0, 2^1)$, так как $1 = 01_3$, $f(1, 2) = 2$ или исходный элемент a_1,
$a_2 = f(2^0, 2^2)$, так как $2 = 02_3$, $f(1, 4) = 4$ или исходный элемент a_2,
$a_3 = f(2^1, 2^0)$, так как $3 = 10_3$, $f(2, 1) = 1$ или исходный элемент a_0,
$a_4 = f(2^1, 2^1)$, так как $4 = 11_3$, $f(2, 2) = 2$ или исходный элемент a_1,
$a_5 = f(2^1, 2^2)$, так как $5 = 12_3$, $f(2, 4) = 2$ или исходный элемент a_1,
$a_6 = f(2^2, 2^0)$, так как $6 = 20_3$, $f(4, 1) = 4$ или исходный элемент a_2,
$a_7 = f(2^2, 2^1)$, так как $7 = 21_3$, $f(4, 2) = 1$ или исходный элемент a_0,
$a_8 = f(2^2, 2^2)$, так как $8 = 22_3$, $f(4, 4) = 1$ или исходный элемент a_0.

В результате получим векторную форму заданной f:

$$f = (224122411).$$

Примеры двухместных операций ранга 3:
операции проектирования по первому аргументу e_1^2; $e_1^2(a_1, a_2) = a_1$;
$e_1^2 = (111222444)$;
операции проектирования по второму аргументу e_2^2; $e_2^2(a_1, a_2) = a_2$;
$e_2^2 = (124124124)$.

Под *суперпозицией операций* $f \in P_A^n$ и $f_1, \ldots, f_n \in P_A^m$ понимают:

$$(f * f_1, \ldots, f_n)(a_1, \ldots, a_m) = f\big(f_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, f_n(a_1, \ldots, a_m)\big).$$

Операцией с фиктивным аргументом называется операция, которая не зависит от одного из аргументов. Например, операция (422422422) не зависит от первого аргумента, так как $f(a_i, 1) = 4, f(a_i, 2) = 2, f(a_i, 4) = 2$.

Существенной операцией называется операция без фиктивных аргументов.

Алгеброй n–местных операций над множеством A называют любое подмножество $K \subseteq P_A^n$, замкнутое относительно суперпозиций и содержащее все n–местные операции проектирования.

Минимальной алгеброй называют алгебру, не содержащую подалгебр.

Клоном над множеством A принято называть любое подмножество $K \subseteq M_A^n$, замкнутое относительно суперпозиций и содержащее все операции проектирования.

Минимальным клоном называют клон, не содержащий подклонов [2]. Для нахождения минимальных алгебр был разработан и реализован алгоритм нахождения минимальных алгебр бинарных операций ранга 3.

3. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Ранее в работе [3] удалось получить конструктивное описание типов унарных мультиопераций, которые порождают минимальные алгебры. Таким образом, через описание типов удалось получить все минимальные алгебры унарных мультиопераций ранга 2 и 3. К сожалению, на данный момент нет конструктивного описания типов бинарных операций, порождающих минимальные алгебры. Для нахождения минимальных алгебр бинарных операций в данной статье используется свойство идемпотентности.

Нетривиальные минимальные алгебры и клоны порождаются идемпотентными операциями и имеют следующий вид [4, 5]:

$$(1a_1a_2a_32a_4a_5a_64),$$

где $a_i \in \{1, 2, 4\}$.

Это необходимое, но не достаточное условие.

Обозначим такие операции как $\mathcal{M} \subset P_A^n$. Пусть $f \in \mathcal{M}$, тогда алгебраическое замыкание f — $[f]$ является подмножеством $\mathcal{M}$.

Так как решетка алгебр операций вкладывается в решетку клонов, то операции, порождающие минимальные клоны, порождают минимальные алгебры. В таблице 3 представлены минимальные клоны, описанные в работе Б. Чекани.

Таблица 3. Бинарнопорожденные минимальные клоны ранга 3

№	Минимальный клон	№	Минимальный клон
14	111121114	38	121222444
15	111122124	39	122222444
16	111122124	40	124222444
17	111122144	41	141222444
18	111122424	42	144222444
19	111221414	43	112222244
20	111224144	44	114222424
21	111422244	45	121222124
22	111121444	46	121222144
23	111122444	47	121222424
24	111124444	48	122222224
25	111221444	49	124222424
26	111224444	50	141222414
27	111422444	51	112221444
28	111424444	52	114122444
29	111222114	53	114124444
30	111222124	54	114224444
31	111222144	55	121224444
32	111222224	56	124224444
33	111222244	57	141422444
34	111222414	58	144424444
35	111222424	59	114122424
36	112222444	60	121224144
37	114222444	61	142421214

Для нахождения всех минимальных алгебр предлагается следующий алгоритм:

1. Перечислим все идемпотентные операции:

$$f = (1a_1a_2a_32a_4a_5a_64),$$

   где $a_i \in \{1, 2, 4\}$.
2. Исключим из этого списка операции проектирования по первому и второму аргументу (111222444), (124124124).
3. Исключим все операции, которые принадлежат минимальным клонам, приведенным в таблице 1.
4. Для оставшихся идемпотентных операций найдем их алгебраические замыкания $[f]$:

   а) если в $[f]$ встретится хотя бы одна операция, которая принадлежит минимальному клону, то это означает, что алгебра, порожденная операцией f, не минимальная (твк как содержит в себе подалгебру);

   б) если в $[f]$ нет ни одной операции, принадлежащей минимальному клону и она порождается любой операцией, входящей в алгебраическое замыкание, то это новая минимальная алгебра.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

В ходе изучения минимальных алгебр бинарных операций ранга 3 были найдены три дополнительные операции, порождающие минимальные алгебры. Из этого следует, что не всякая операция, порождающая минимальную алгебру, порождает минимальный клон. Порождают минимальные алгебры, но не минимальные клоны следующие операции:

$$\left[(114222144)\right] = \left\{(114222144), (121124424), e_1^2, e_2^2\right\},$$

$$\left[(111224424)\right] = \left\{(111224424), (124122144), e_1^2, e_2^2\right\},$$

$$\left[(114224124)\right] = \left\{(114224124), (121122444), e_1^2, e_2^2\right\}.$$

Вышеперечисленные алгебры при переходе к трехместным операциям совпадают и являются надминимальными для минимального тернарнопорожденного клона:

$$\left[(111111111224222422424244444)\right].$$

Всего были найдены 51 существенные операции, которые порождают минимальные алгебры бинарных операций ранга 3. Из них 48 совпадают с операциями, которые порождают минимальные клоны, а 3 новые операции порождают только минимальные алгебры.

Для доказательства того что других минимальных алгебр нет, приведена таблица 4, в которой показано, что оставшиеся идемпотентные операции порождают не минимальные алгебры.

Таблица 4. Идемпотентные бинарные операции ранга 3

№	**Операция**	$№_{min}$	№	Операция	$№_{min}$	№	Операция	$№_{min}$
0	142421244	27	24	112122444	40	48	144422214	32
1	114422124	46	25	112424414	42	49	112424214	32
2	121222244	33	26	142221424	48	50	141124244	51
3	142124414	55	27	121224114	18	51	121221424	48
4	141424114	38	28	144421424	35	52	142224144	20
5	142122444	24	29	112124424	40	53	144222414	35
6	114422114	40	30	114424114	39	54	121122114	43
7	141122114	50	31	121221214	53	55	144121424	32
8	141124444	51	32	114122244	19	56	124224114	33
9	114121214	39	33	141421214	28	57	114221214	46
10	142421444	37	34	141424244	42	58	144422144	29
11	111424114	38	35	141224214	31	59	144422444	35
12	111422224	45	36	121422214	48	60	142422424	54
13	144224224	34	37	112124244	51	61	114124244	51
14	142121144	38	38	122422124	45	62	112421214	31
15	122124114	5	39	112121414	39	63	142421424	32
16	124422144	24	40	122424214	47	64	142424444	37
17	111422114	43	41	114421224	16	65	144122444	32
18	144224114	28	42	124222414	47	66	124422224	54
19	144121114	42	43	142422444	47	67	114424244	49
20	114224114	28	44	112124444	51	68	141121414	39
21	141422214	52	45	141124414	51	69	122421414	46
22	112122144	50	46	111424424	29	70	121121214	43
23	114424144	42	47	111224214	25	71	122421244	33

№	Операция	$№_{min}$	№	Операция	$№_{min}$	№	Операция	$№_{min}$
72	112422414	59	123	121421124	43	174	112124124	40
73	122424244	37	124	141422124	52	175	111122244	50
74	124222224	36	125	112124144	51	176	122424424	35
75	144424224	34	126	112221144	44	177	112424244	49
76	114124224	40	127	141122214	50	178	121121144	44
77	114222124	46	128	114422214	30	179	114121144	39
78	112221414	31	129	124221124	33	180	122422114	45
79	142122214	46	130	144421444	37	181	124424414	35
80	141124214	58	131	141221224	45	182	141121214	38
81	111421414	51	132	141224124	44	183	114221444	49
82	111424144	58	133	114122144	40	184	112224414	41
83	144221424	47	134	122122444	26	185	121424214	15
84	142224414	49	135	122222414	34	186	112224244	41
85	121422424	48	136	142224214	33	187	122222144	33
86	122224414	47	137	142421124	52	188	121124214	25
87	124121424	32	138	122124244	41	189	141424414	42
88	142222424	54	139	122121244	44	190	124421224	47
89	144421124	29	140	124422424	54	191	124121214	31
90	111224124	44	141	114421244	49	192	124122214	23
91	144422124	46	142	114221144	28	193	142222224	36
92	141424144	58	143	112424444	42	194	144121244	42
93	141122244	40	144	144121224	59	195	114422424	17
94	141222124	52	145	111122214	57	196	121424144	22
95	141424444	42	146	141221244	60	197	112224444	49
96	141122414	40	147	112421144	50	198	122221214	36
97	142424124	27	148	122122144	30	199	141421144	58
98	142422224	36	149	112224224	26	200	122122224	45
99	114424214	37	150	144221214	41	201	122224114	33
100	124422114	46	151	122224144	20	202	122421114	52
101	142421114	50	152	111221114	43	203	111424124	44
102	121421144	22	153	111121414	39	204	111121144	38
103	112122244	40	154	141422424	46	205	121124444	41
104	144221244	35	155	142124244	42	206	114222224	46
105	111422414	29	156	141424224	33	207	121422144	18
106	144224414	49	157	141222424	48	208	141224424	27
107	114224214	16	158	121122424	46	209	114424124	40
108	114121244	51	159	121224224	33	210	124121444	32
109	142422124	45	160	114221424	17	211	121422444	24
110	124422244	47	161	124221444	47	212	121421424	15
111	112122414	21	162	141222144	44	213	112222424	46
112	142421224	48	163	124224244	56	214	142121124	52
113	122122214	45	164	121422244	33	215	114224424	32
114	114221124	25	165	121424414	41	216	144424144	42
115	122124424	32	166	121124244	41	217	121222114	53
116	122421214	48	167	141421414	51	218	114124414	55
117	142124224	26	168	144122114	29	219	144124424	32
118	122224214	34	169	111421144	58	220	141122444	24
119	111221224	45	170	122422224	36	221	124124244	41
120	111424214	31	171	122121114	45	222	142122414	27
121	121224414	20	172	141121144	38	223	144421114	51
122	124122224	46	173	124421114	28	224	122122244	30

№	Операция	$№_{min}$	№	Операция	$№_{min}$	№	Операция	$№_{min}$
225	141121244	39	276	114221114	28	327	141122124	52
226	124121144	41	277	121424124	44	328	122124214	30
227	142121224	52	278	111124424	40	329	122421424	36
228	122422144	33	279	111421214	38	330	144224214	37
229	122124444	41	280	142121414	40	331	144122214	14
230	144424214	49	281	114421214	40	332	142424244	37
231	114222114	31	282	124221224	34	333	114121224	40
232	142221124	53	283	124224214	34	334	142121444	27
233	112122224	57	284	111224224	30	335	124422444	47
234	141222244	27	285	144422224	36	336	142222124	48
235	144421224	47	286	114122114	40	337	114122214	21
236	121121224	43	287	122422444	34	338	111122414	40
237	114424414	37	288	141224224	33	339	144221124	33
238	142424424	35	289	114121424	19	340	142221444	27
239	141124114	58	290	111224114	44	341	112224124	23
240	112422244	26	291	144422114	40	342	122122424	46
241	111421244	28	292	141124144	58	343	114124214	39
242	112121214	38	293	122424144	41	344	111121124	38
243	144422424	54	294	112122424	21	345	121421444	24
244	142224244	56	295	112421224	46	346	112221424	46
245	142122124	45	296	122222424	36	347	122221244	34
246	112421414	51	297	112224144	22	348	114224224	26
247	112222144	23	298	114422224	17	349	141224444	41
248	114424444	37	299	142222444	47	350	144124214	51
249	122121444	64	300	121124114	44	351	112224424	26
250	144222224	36	301	111124214	50	352	144222214	30
251	144121444	37	302	111421424	25	353	111221244	30
252	121421114	43	303	112422424	17	354	112124414	51
253	124421444	49	304	121422114	52	355	111422144	50
254	142221224	36	305	121424114	44	356	144224144	41
255	112222114	43	306	122421144	14	357	141124424	24
256	124421144	24	307	141122224	52	358	114222414	32
257	112422114	43	308	141421114	38	359	144122144	29
258	114421444	55	309	114421414	55	360	112121244	50
259	114221244	32	310	142222414	26	361	121421214	44
260	114421144	51	311	112224214	44	362	111221424	25
261	112422224	45	312	122221444	34	363	122121124	52
262	121121414	31	313	144222424	54	364	114424224	26
263	144424414	37	314	112121444	39	365	122224124	33
264	124221114	33	315	122121414	46	366	144421414	37
265	144424244	37	316	121224214	18	367	142424214	49
266	144221414	49	317	112124214	39	368	114421124	25
267	114121444	55	318	112224114	44	369	122121224	43
268	144222114	62	319	141121424	40	370	122221424	48
269	142122144	14	320	124121414	32	371	141424424	27
270	121424224	27	321	144222144	27	372	122424444	37
271	142422114	40	322	144121214	51	373	122122114	45
272	112221224	45	323	111224244	41	374	122224224	34
273	121222214	53	324	144422244	35	375	144222244	35
274	141421124	43	325	111422214	31	376	142221414	47
275	121124224	44	326	142421414	29	377	142424144	42

№	Операция	$№_{min}$	№	Операция	$№_{min}$	№	Операция	$№_{min}$
378	144424114	39	429	124421214	47	480	141121444	39
379	142221244	47	430	121224244	20	481	114224244	49
380	124421424	35	431	142121244	44	482	121221414	33
381	112424224	32	432	142222214	36	483	114121114	39
382	141422414	29	433	112424144	51	484	111221124	52
383	111421124	50	434	144122424	17	485	112222414	31
384	122422424	36	435	114221224	46	486	121221244	18
385	124422214	54	436	142124114	51	487	112121424	21
386	142122244	32	437	111422124	52	488	121124414	25
387	124222214	48	438	141121124	43	489	141421244	51
388	122222124	36	439	144224124	33	490	141424214	41
389	124221414	47	440	124121224	43	491	114422414	19
390	121122224	45	441	141424124	44	492	121422414	33
391	142224444	56	442	122424114	60	493	121424244	20
392	112121224	38	443	111122224	57	494	144122224	46
393	112424124	40	444	141221114	43	495	121121444	28
394	141422224	48	445	144124244	42	496	124122444	32
395	122221114	36	446	121122144	44	497	124221144	33
396	142122114	38	447	111222214	52	498	112422444	26
397	142422144	33	448	122124414	32	499	114421114	39
398	142124424	24	449	122422244	34	500	114422244	32
399	142122224	45	450	144421144	42	501	111421114	38
400	111124244	51	451	144221114	41	502	122421124	52
401	141421424	40	452	141422144	44	503	122221414	48
402	112122214	57	453	142422414	47	504	121221444	33
403	121121114	43	454	112422124	52	505	142422214	26
404	124122114	46	455	121224424	33	506	124424244	56
405	141221424	46	456	111122114	38	507	114222244	23
406	144224444	37	457	141224414	41	508	124221214	34
407	144424424	35	458	141222224	45	509	121222224	36
408	142421144	41	459	112124114	39	510	111421224	28
409	111421444	51	460	114424424	32	511	111424224	63
410	142221214	30	461	124421244	56	512	142122424	17
411	124222144	33	462	142224124	23	513	114122414	19
412	112221124	52	463	112124224	40	514	111121224	38
413	111221144	44	464	142222244	47	515	112422214	52
414	114221414	32	465	121421414	41	516	144421244	37
415	142121114	50	466	124121244	41	517	112222214	52
416	111121424	40	467	111424414	42	518	121122414	31
417	141224144	22	468	142224224	34	519	122124144	41
418	112421114	38	469	111124114	38	520	124424444	37
419	121221224	36	470	142424414	37	521	121122244	30
420	144124114	51	471	111121244	39	522	141221214	52
421	122422214	36	472	114224414	49	523	122421224	48
422	122424224	35	473	111224414	25	524	124222244	47
423	141421224	33	474	144422414	35	525	112221214	52
424	122224444	56	475	144122124	46	526	141122144	50
425	142224424	47	476	112422144	44	527	144121414	37
426	141222114	43	477	122224424	34	528	112424424	32
427	121422224	48	478	124224414	47	529	112421444	29
428	112421124	57	479	144221224	34	530	144124444	37

№	Операция	$№_{min}$	№	Операция	$№_{min}$	№	Операция	$№_{min}$
531	112121114	38	567	112122114	38	603	114121414	55
532	142124214	51	568	122222114	36	604	141122424	21
533	112122124	57	569	112424114	39	605	121421224	36
534	142222114	26	570	144121144	42	606	124424224	47
535	141221444	28	571	121221144	18	607	142424114	51
536	124424214	47	572	122424414	35	608	122222244	34
537	114222214	23	573	122222214	36	609	122422414	34
538	114421424	19	574	141221124	52	610	112221114	43
539	124422124	46	575	121424424	27	611	144122414	19
540	121424444	41	576	111124414	51	612	111422424	46
541	124124414	32	577	112421244	51	613	144224424	35
542	141222214	30	578	112121124	57	614	121121424	31
543	124122244	23	579	141224114	22	615	114121124	40
544	141421444	51	580	122424124	35	616	142422244	47
545	122121424	31	581	122224244	56	617	111221214	52
546	122221224	36	582	141121114	38	618	112121144	50
547	142222144	23	583	124222114	33	619	124421414	35
548	142124144	42	584	121221114	53	620	144122244	32
549	144221444	35	585	144124224	34	621	144124414	55
550	142124444	49	586	122121144	30	622	144121124	42
551	144221144	41	587	141124224	44	623	112222124	52
552	114422444	32	588	121422124	52	624	142121424	15
553	144421214	49	589	111121214	38	625	121421244	29
554	124122414	32	590	121121244	44	626	121221124	53
555	141422244	27	591	112222224	45	627	112421424	28
556	124424144	41	592	144224244	37	628	122421444	29
557	141124124	44	593	114422144	29	629	124221424	47
558	124221244	47	594	141422114	50	630	141224244	20
559	142121214	50	595	124422414	47	631	141221414	28
560	141221144	22	596	141121224	43	632	121222414	48
561	122122414	46	597	144222124	46	633	111124224	40
562	142221114	44	598	142221144	26	634	111424244	42
563	121122214	52	599	124424114	39	635	114122224	21
564	122221124	53	600	142424224	47	636	142224114	16
565	114224144	41	601	122121214	52			
566	112221244	30	602	122221144	18			

В данной таблице представлены все оставшиеся 637 идемпотентные операции. В третьем столбце указан номер минимальной алгебры, которая входит в соответствующее алгебраическое замыкание идемпотентной операции. Минимальные алгебры пронумерованы в соответствии с таблицей минимальных клонов из работы Б. Чекани. Таблица дополнена тремя номерами (номер 62–64), которые соответствуют трем найденным минимальным алгебрам.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Был разработан и реализован алгоритм нахождения минимальных алгебр на основе свойства идемпотентности образующих. С помощью алгоритма найдены и описаны все минимальные алгебры бинарных операций ранга 3. Из 51 алгебры, порожденной существенными операциями, 48 совпадают с минимальными клонами и описаны ранее в работе Б. Чекани. Найдены три новые существенные операции, порождающие минимальные алгебры. Из работ Б. Чекани данные алгебры получить нельзя.

Список литературы

1. Эрлагольская тетрадь. Избранные открытые вопросы по алгебре и теории моделей, поставленные участниками Эрлагольских школ-конференций // составители: Пинус А. Г., Порошенко Е. Н., Судоплатов С. В. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. 40 с.
2. *Csakany B.* All minimal clones on three-element set. Szeged: Acta Cybernetyca, 1983. T. 6. P. 227–237.
3. *Peryazev N. A., Peryazeva Yu. V., Sharankhaev I. K.* Minimal algebras of unary multioperations // Izvestiya SPbGETU "LET". 2016. № 2. P. 22–26.
4. *Перязев Н. А.* Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны // Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. Т. 151, кн. 2 (2009). С. 120–125.
5. *Lay D.* Function Algebras on Finite Sets. Berlin: Springer-Verlag, 2006. doi: 10.1007/3-540-36023-9

Поступила в редакцию 12.02.2020, окончательный вариант — 13.03.2020.

Еременко Дмитрий Александрович, аспирант кафедры ВТ факультета компьютерных технологий и информатики СПбГЭТУ «ЛЭТИ», ✉ **er_92@list.ru**

Computer tools in education, 2020
№ 1: 38–48
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-1-38-48

Minimal Algebras of Binary Operations of Rank 3

Eremenko D. A.[1], postgraduate, ✉ er_92@list.ru

[1]Saint Petersburg Electrotechnical University,
5, building 3, st. Professora Popova, 197376, Saint Petersburg, Russia

Abstract

The problem of finding minimal algebras of binary operations of rank 3 is considered in this paper. Solving this problem is the first step for constructing a lattice of algebras of binary operations of rank 3. The construction of such a lattice is one of the problems of universal algebra, in particular, the theory of lattices. The article describes an algorithm for finding minimal algebras, which is based on the idempotency property of operations generating minimal algebras. This algorithm was implemented in Python. The results of the algorithm are presented in tabular form.

Keywords: *operations, multioperations, lattice of algebras operations, minimal algebras of operations.*

Citation: D. A. Eremenko, "Minimal Algebras of Binary Operations of Rank 3," *Computer tools in education*, no. 1, pp. 38–48, 2020 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2020-1-38–48

References

1. *Erlagol notebook. Selected open questions on algebra and model theory posed by participants in Erlagol school-conferences*, A. G. Pinus, E. N. Poroshenko, and S. V. Sudoplatov, eds., Novosibirsk, Russia: NSTU Publishing House, 2018 (in Russian).
2. B. Csakany, “All minimal clones on three-element set,” *Acta Cybernetyca*, vol. 6, pp. 227–237, 1983.
3. N. A. Peryazev, Yu. V. Peryazeva, and I. K. Sharankhaev, “Minimal algebras of unary multioperations,” *Izvestiya SPbETU "LETI"*, no. 2, pp. 22–26, 2006 (in Russian).
4. N. A. Peryazev, “Clones, co-clones, hyperclones and superclones,” *Scientific notes of Kazan State University. Phys.-Math. sciences*, vol. 151, no. 2, pp. 120–125, 2009 (in Russian).
5. D. Lau, *Function Algebras on Finite Sets*, Berlin: Springer-Verlag, 2006; doi: 10.1007/3-540-36023-9

Received 12.02.2020, the final version — 13.03.2020.

Dmitry A. Eremenko, Postgraduate, Department of Computer Science and Engineering, Faculty of Computer Science and Technology, Saint Petersburg Electrotechnical University, ✉ **er_92@list.ru**